

Pirmasens, den 26.05.2008

Arbeitskreis Didaktik  
Simone Haag  
Christiane Tomsitz

## Die Brachistochrone

### Wieso ist der längere Weg auch der schnellere?

Du lässt einen Ball eine gerade Bahn und einen anderen Ball eine geschwungene Bahn gleichzeitig hinunterrollen. Beide Bahnen haben den gleichen Anfangs- und Endpunkt. Welcher Ball ist schneller am Ziel?

Die geschwungene Bahn ist eine Brachistochrone (gr. brachistos = kürzeste, chronos=Zeit). Ihr Verlauf stellt die schnellste Verbindung zweier Punkte dar. Dabei ist die Kurve der Bahn so gewölbt, dass der Ball auf dem stärkeren Gefälle zu Beginn den richtigen Schwung holen kann. Trotz seichter Neigung am Ende der Bahn kann er dadurch einen Vorsprung zu dem Ball auf der geraden Bahn beibehalten.

### Für Bastelfreunde: Baue deine eigene Brachistochrone!

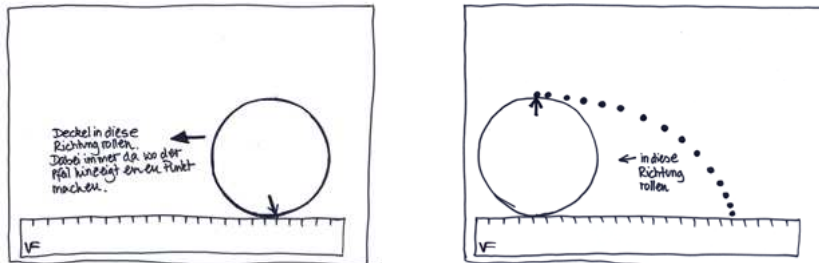
#### Material

- Papier bzw. Pappe
- Klebeband
- Lineal
- Deckel von Einmachglas oder runder Bierdeckel
- Filzstift



Um die optimale Kurvenform, die Brachistochrone, zu bekommen musst du „einen Kreis auf einer Geraden abrollen“. Was das bedeutet, ist leicht zu veranschaulichen:

Klebe ein Blatt Papier bzw. Pappe am Tisch fest. Auf dem Papier befestigst du parallel zum unteren Rand ein Lineal. Nun markiere am Rand des Deckels einen Pfeil nach außen. Jetzt legst du den Deckel an der Kante des Lineals so an, dass der Pfeil senkrecht auf das Lineal zeigt.



Rolle den Deckel auf dem Lineal entlang und male ungefähr jeden Zentimeter einen Punkt auf das Blatt genau an der Stelle, auf die der Pfeil zeigt. Die so erhaltene Kurve nennt man **Zykloide**.

Die Zykloide dient als Spur für die erste Kugelbahn. Befestige einen Streifen Pappe an der gezeichneten Kurve und klebe das Papier mit der Pappbahn in einen Schuhkarton wie auf dem Foto zu sehen.

Als nächstes ist die zweite Kugelbahn, die direkte Verbindung, an der Reihe: Sie startet und endet auf gleicher Höhe wie die erste Kugelbahn und besteht aus einem geraden (ungebogenen) Stück Pappe.

Jetzt kann der Kugelwettlauf beginnen! Probier es aus!

### Von Skatern und Boardern...

Auf der Zykloide geht's also am schnellsten. Das kann man auch bei den Skatern und Snowboardern sehen. Die Halfpipes, in denen sie ihre Tricks machen, haben meistens auch die Form einer Brachistochrone.

### Immer zur gleichen Zeit...

Als weitere Bahn kann man eine umgedrehte Brachistochrone nutzen. Man wird feststellen, dass es sich um die langsamste Verbindung handelt.

Hat man zwei gleiche Brachistochronen-Bahnen, lässt sich eine erstaunliche Eigenschaft dieser Zykloide zeigen: Lässt man auf beiden Bahnen zur gleichen Zeit aber an unterschiedlichen Anfangspunkten jeweils eine Kugel starten, kommen beide Kugeln gleichzeitig am Zielpunkt an! Die Laufzeit ist also unabhängig von der Fallhöhe. Die Kurve ist also auch eine **Tautochrone** (tautos=gleich).

## Für geschichtlich Interessierte

Bereits im 17. Jahrhundert machte man sich Gedanken darüber, welche Bahn die kürzeste Laufzeit hat. Galilei hatte erkannt, dass dies nicht der kürzeste Weg sein kann und vermutete, dass Anfangs- und Endpunkt auf einem Kreisbogen liegen.

Fermat (1601-1665) entdeckte, dass sich das Licht nicht auf der kürzesten, sondern auf der schnellsten Verbindung fortbewegt.

Der Basler Mathematiker Johann Bernoulli (1667-1748) stellte 1696 in der Zeitschrift „Acta eruditorum“ folgendes Problem: „Es soll die Kurve bestimmt werden, auf der ein reibungsfrei gleitender Körper von Punkt A zu Punkt B in der kürzesten Zeit gelangt.“

Hier ein Auszug aus der damaligen Aufgabenstellung:

*Einladung zur Lösung eines neuen Problems:*

*"Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt."*

Im Anschluss an die Aufgabenstellung schrieb er weiter:

*"Damit Liebhaber solcher Dinge Lust bekommen sich an die Lösung dieses Problems zu wagen, mögen sie wissen, dass es nicht, wie es scheinen könnte, blosser Speculation ist und keinen praktischen Nutzen hat. Vielmehr erweist es sich sogar, was man kaum glauben sollte, auch für andere Wissenszweige, als die Mechanik, sehr nützlich. Um einem voreiligen Urtheile entgegenzutreten, möge noch bemerkt werden, dass die gerade Linie AB zwar die kürzeste zwischen A und B ist, jedoch nicht in kürzester Zeit durchlaufen wird. Wohl aber ist die Curve AMB eine den Geometern sehr bekannte; die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat."*

Er selbst sowie weitere namhafte Mathematiker wie Leibniz, L'Hopital, Huygens und Jakob Bernoulli lösten auf unterschiedliche Weise das Brachistochronen-Problem.

## Quellen

Artikel „Technikforum“: K. Hoseus: Elementa 1 – Zukunftswerkstatt - S. 25  
[http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/bernoulli/  
brachistochronenproblem.html](http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/bernoulli/brachistochronenproblem.html)