DYNAMIKUM
Science Center
Pirmasens

Science Center Pirmasens e.V.
Im Rheinberger
Fröhnstraße 8
66954 Pirmasens

Telefon +49(0)6331/842 842
Fax +49(0)6331/842 843

info@dynamikum.de
www.dynamikum.de

Mit eckigen Rädern fahren

Für Spielfreudige und mathematisch Interessierte

Mit eckigen Rädern fahren: Das klingt reichlich unwahrscheinlich, aber möglich ist es. Zugegeben: Die Idee ist etwas wunderlich und hat auch keine praktische Anwendung. Ein Fahrzeug mit quadratischen Rädern ist ein Spielzeug, vor allem für Leute, die über das Spiel hinaus angeregt werden wollen, den mathematischen Hintergründen auf die Spur zu kommen.

Ein Modell aus Papperollen

Dem Untergrund, auf dem die quadratischen Räder rollen sollen, gilt zunächst unser Augenmerk. Da die Strecke sich aus gleichmäßigen Kreisbögen zusammen zu setzen scheint, werden ca. 10 Rollen (z. B. vom Toilettenpapier) gleichförmig auf eine Unterlage geklebt. Einfacher geht es mit Hilfe von Büroklammern, mit deren Hilfe man in Minutenschnelle eine beliebig lange Bahn herstellen kann.

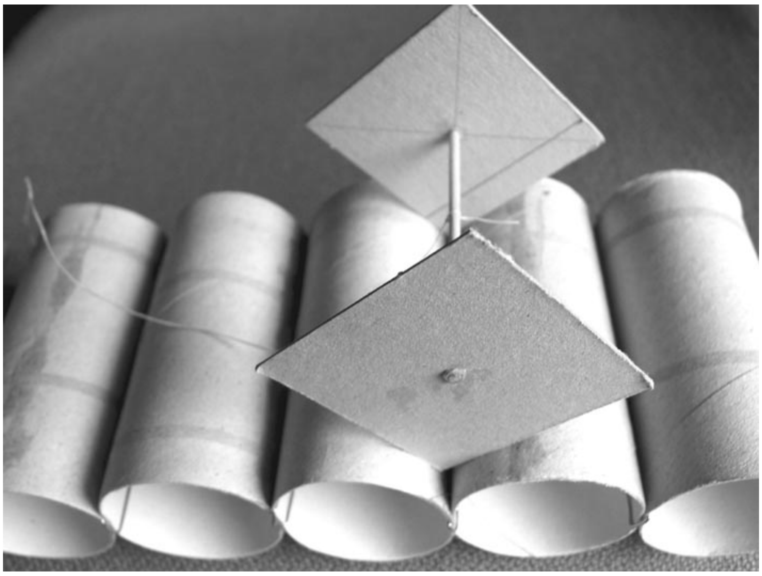
Für ein einfaches Fahrzeug genügen zwei gleiche Quadrate aus (möglichst dicker) Pappe, die mit einem dünnen Hölzchen (Teil eines Schaschlikspießes) durch die Mittelpunkte verbunden sind. Wie lang muss die Quadratseite sein? Das können wir durch Ausprobieren heraus bekommen, indem wir z. B. eine kleine Serie verschieden großer Quadrate herstellen. Durch Abrollen probieren wir, welches Maß am ehesten die Bedingungen erfüllt (kein Anstoßen an die nächste Welle, kein Abrutschen in die Vertiefung!).

Die Räder werden auf Pappe gezeichnet, der Mittelpunkt mit Hilfe der Diagonalen bestimmt. Hier wird die Pappe (mit einem Nagel o. ä.) durchbohrt und das Hölzchen als Achse eingeklebt.

Mit einer an der Achse befestigten Schnur ziehen wir die Räder langsam und möglichst gleichmäßig über die Rollbahn. Bei leichter Schrägstellung der Bahn rollt das Gefährt selbstständig die Bahn hinunter.

Wer es gerne etwas luxuriöser haben will, findet eine schöne Anleitung unter der Web-Adresse:
http://www.pi5.uni-stuttgart.de/pubs/experimenta/exponate/athome.htm .

Einfaches Modell aus Pappe



Die Bahn aus Kreisbogen - genauer betrachtet

Sehen wir uns die gebastelte Roll(en)bahn mit mathematischem Blick an (Abb. 1). Die Spitze des Quadrats hängt im Niemandsland! Die Parallele zur Grundlinie muss daher nach oben verschoben werden, sodass der Endpunkt P der Quadratseite gleichzeitig Berührungspunkt des 1. und 2. Kreisbogens ist.

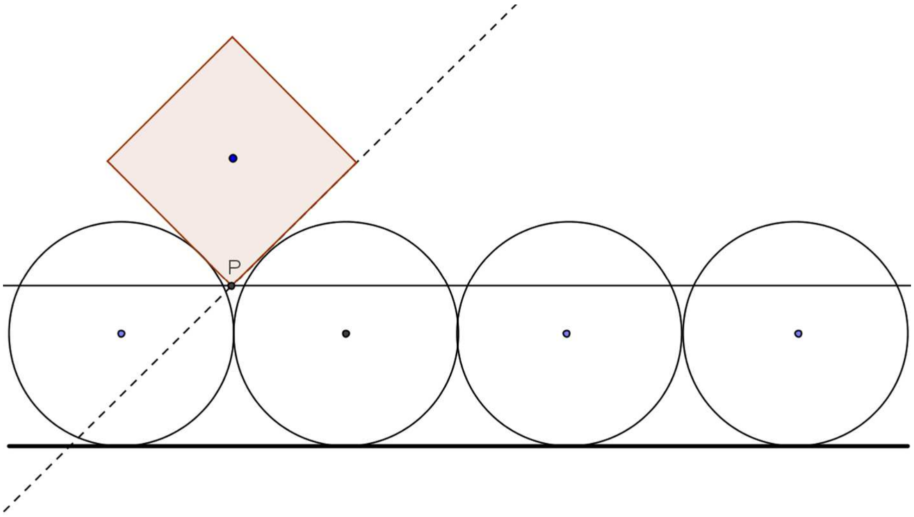


Abb. 1: Schematische Darstellung der Bahn aus Papperollen

Die Quadratseite ist stets Tangente an den Kreis.

Erinnern wir uns: Die Tangente bildet mit dem Durchmesser im Berührungspunkt einen rechten Winkel. Wir müssen nun den Punkt P so verschieben, dass die gestrichelte Senkrechte durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. So weit die Ausgangsposition.

Betrachtet man sich die beiden auf der Spitze stehenden Quadrate in Abb. 2, dann sieht man dass die Verlängerungen der Quadratseiten einen Winkel von 90° einschließen.

Damit ist klar: Die Quadratseite rollt auf einem Viertelkreis ab. Die gesuchte Bahn besteht aus aneinandergereihten Bogen von Viertelkreisen. Die Quadratseite beträgt damit ein Viertel des Kreisumfangs.

Zwischen Quadratseite (= Bogenlänge b des Viertelkreis) und dem Radius besteht also folgender mathematische Zusammenhang:

$$b = \frac{2\pi r}{4} \Rightarrow r = \frac{4b}{2\pi} = \frac{2b}{\pi}$$

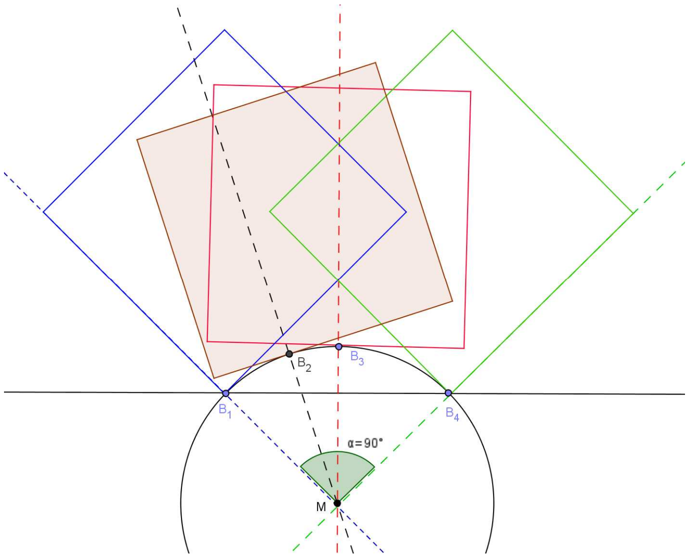


Abb. 2: Die Senkrechten der Tangenten schneiden sich in M

Geht es auch mit Zirkel und Lineal?

Für Geometrie-Puristen ist eine rechnerische Lösung nicht akzeptabel. Geht es auch mit Zirkel und Lineal? Ja. Schauen wir uns Abb. 3 an. Wenn die quadratischen Räder ohne Ruckeln abrollen sollen, dann muss die Achse stets auf gleicher Höhe bleiben. Der Mittelpunkt (Achse!) muss sich also auf der grünen Linie bewegen.

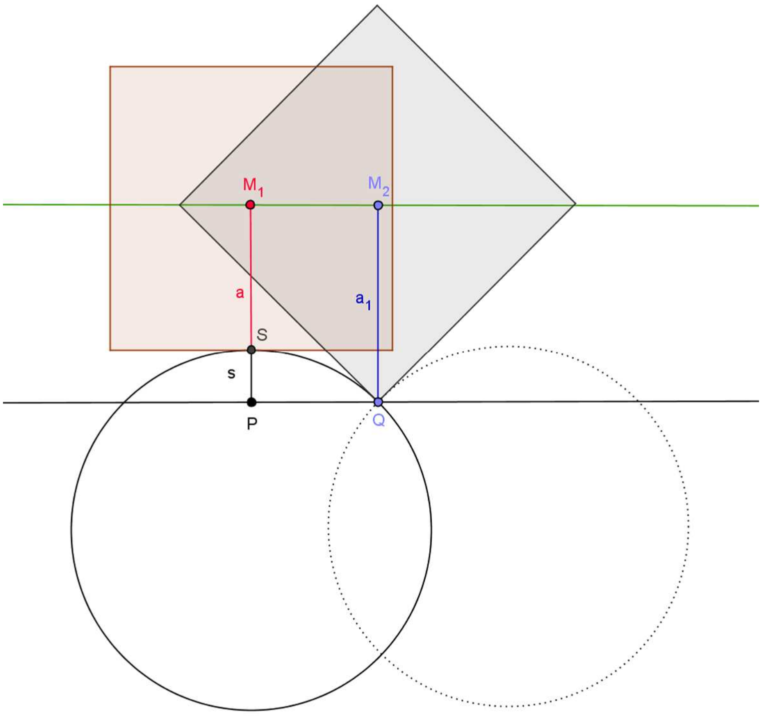


Abb. 3: Die Höhe des Scheitelpunktes

Betrachten wir uns die Stadien des Abrollens genauer: Das Quadrat liegt zunächst waagerecht auf dem Scheitelpunkt (S) des Bogens. Die Entfernung zum Mittelpunkt (M_1) entspricht der halben Quadratseite. Bei Annahme, dass die Quadratseite 2a beträgt, ist das a. Dann rollt das Quadrat auf dem Bogen ab, bis es schließlich auf der Spitze steht (Punkt Q). Nun beträgt die Entfernung zum Mittelpunkt (M_2) dem Wert von a_1, der halben Diagonale.

Der Unterschied zwischen a und a_1 beträgt s. Da $a_1 = \sqrt{2}$ (Satz des Pythagoras!), hat die Strecke s eine Länge von $a(\sqrt{2} - 1)$.

Nun zur Konstruktion des Kreisbogens: Zunächst werden zwei Parallelen im Abstand der Scheitelhöhe gezeichnet (a, b). Zwei weitere Geraden (c, d), die ihren Schnittpunkt P auf b haben, schneiden b (und a) im Winkel von 45° bzw. 135° (Teile des auf der Spitze stehenden Quadrats!). d ist die Tangente an den Kreis, c steht senkrecht auf ihr und muss durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Da der Kreis auch die Gerade a berühren muss, liegt der Mittelpunkt des Kreises auch auf der Halbierenden des Winkels, der von a und d gebildet wird (w). Der Schnittpunkt von c und w ist damit der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises.

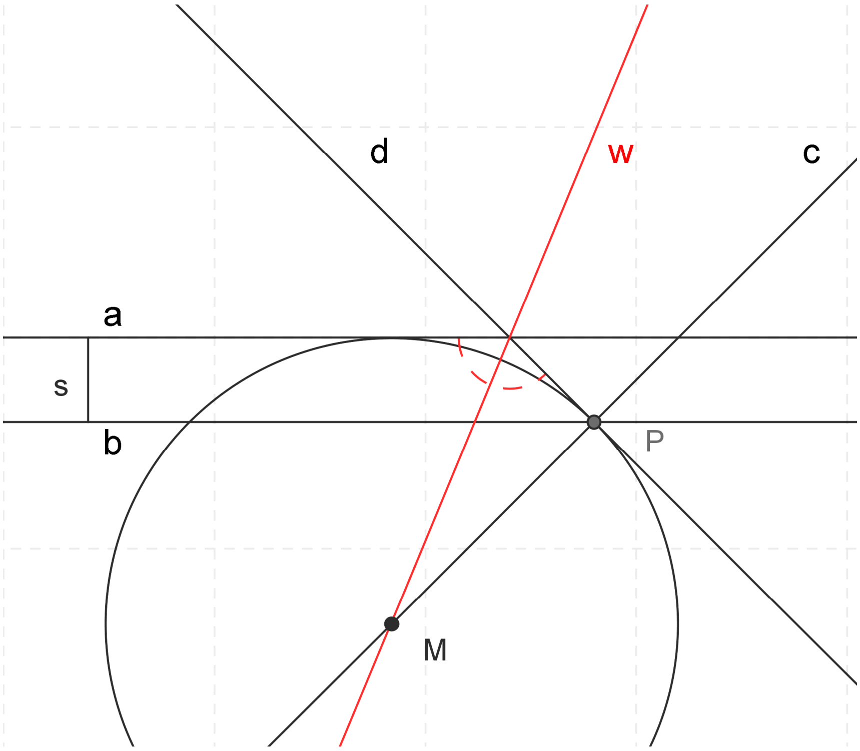


Abb. 4: Die Konstruktion des Kreisbogens